- بما أن الحل العام للمعادلة التفاضلية العادية من المرتبة الثانية (مثلاً) يحتوي على ثابتين اختياريين، فيجب علينا تحديد الثابتين.
- كما يوجد شرطين إضافيين للمعادلة:

1 - إذا أعطي هذين الشرطين عند نفس النقطة x_0 :

$$y(x_0) = a \quad \text{and} \quad y'(x_0) = b$$

فإن تلك الشروط تعرف بالشروط الابتدائية عند x_0 وعندئذ تسمى المعادلة التفاضلية إضافة إلى الشروط الابتدائية مسألة القيم الابتدائية.

2 إذا أعطي الشرطين عند نقطتين مختلفتين

$$y(x_0) = y \quad \text{and}$$

كانت الشروط شروطاً حدية وتسمى المعادلة التفاضلية بالإضافة إلى الشروط الحدية بمسألة القيم الحدية

مثال حل مسألة القيم الابتدائية:

$$y'' = x \;,\; y(0) = 1 \;,\; y'(0) = -1$$

الحل: نكامل:

$$y' = \frac{x^2}{2} + C \Rightarrow \boxed{y = \frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2}$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$y'(0) = -1 = C_1 \Rightarrow \boxed{C_1 = -1}$$

$$y(0) = 1 = C_2 \Rightarrow \boxed{C_2 = 1} \;,\; \boxed{y = \frac{x^3}{6} - x + 1}$$

Scanned by CamScanner

مثال 2 أوجد الحل الخاص بالمعادلة التفاضلية

$$y'' = 6x + 2$$

حيث أن الشروط الحدية (عند نقطتين مختلفتين) معطاة على الشكل التالي:

$$y(0) = 2 \quad , \quad y(2) = 8$$

الحل: الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$y' = 3x^2 + 2x + C_1$$

$$y = x^3 + x^2 + C_1 x + C_2$$

ويجب إيجاد الحل الخاص بناءً على الحل العام فنعوض:

$$y(0) = 2 = C_2 \Rightarrow \boxed{C_2 = 2} \quad , \quad y(2) = 8 + 4 + 2C_1 + 2 = C_1$$

$$\Rightarrow \boxed{C_1 = -3}$$

فيكون الحل الخاص:

$$y = x^3 + x^2 - 3x + 2$$

ملاحظة: الحل العام يعطى بدلالة ثوابت اختيارية بينما الحل الخاص يعطى بدلالة قيم محددة

✱ نظرية الوجود والوحدانية:

- لنفرض أن $y' = f(x,y)$ معادلة تفاضلية معطاة لدينا ولنفرض الشرط الابتدائي $y(x_0) = y_0$ وإذا كان التابع $f(x,y)$ معرفاً في المنطقة المغلقة المحددة R، حيث a, b ثابتان عدديان:

$$R: |x - x_0| \leq a \quad , \quad |y - y_0| \leq b$$

حيث وليكن:

1) التابع $f(x,y)$ تابعاً مستمراً ومحدوداً بمعنى إذا وجد عدد موجب وليكن M فإن:

$$|f(x,y)| \leq M$$

Scanned by CamScanner

2) التابع $f(x,y)$ مشتق جزئي بالنسبة لـ y ، محدود بعدد:

$$\left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right| \leq K$$ حيث K عدد موجب ،

- فإن للمعادلة التفاضلية $y' = f(x,y)$ حل وحيد يحقق الشرط الابتدائي $y(x_0) = y_0$ في المنطقة $|x - x_0| \leq h$ حيث

$$h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$$

* معادلات تفاضلية من المرتبة الأولى والدرجة الأولى :

يكتب هذا النوع من المعادلات على الشكل:

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

أو تكتب على الشكل:

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

لحل مثل هذه المعادلة نتبع الطريقة الآتية:

- طريقة فصل المتحولات : إذا أمكن كتابة المعادلة على الشكل :

$$f(x)\,dx + g(y)\,dy = 0$$

حيث أن $f(x)$ تابع لـ x فقط و $g(y)$ تابع لـ y ، عندئذ نكون قد فصلنا المتحولات ، ونستخدم التكامل المباشر في الحل:

$$\int f(x)\,dx + \int g(y)\,dy = C$$: C ثابت اختياري

ويسمى ذلك الحل بالحل العام وفي حال أعطينا شرط ابتدائي نستطيع حذف الثابت الاختياري والحل الناتج يكون الحل الخاص.

مثال: أوجد الحل العام والحل الخاص الذي يمر بالنقطة $(0,0)$ للمعادلة التفاضلية

$$e^x \cos y\,dx + (1+e^x)\sin y\,dy = 0$$

الحل

$$\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right)dx + \frac{\sin y}{\cos y}\,dy = 0$$

$$\int\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right) + \int\left(\frac{\sin y}{\cos y}\right)dy = \ln(C)$$

Scanned by CamScanner

$$\ln(1+e^x) - \ln|\cos y| = \ln(C)$$

$$\ln\frac{1+e^x}{|\cos y|} = \ln(C) \Rightarrow \frac{1+e^x}{|\cos y|} = C$$

$$\frac{1+1}{1} = C \Rightarrow \boxed{C=2}, \quad \boxed{\frac{1+e^x}{|\cos y|} = 2}$$ المنحني

مثال أوجد معادلة المنحنيات التي تحقق المعادلة

$x \cdot y \cdot dy + \frac{y+y^3}{1+x^2}\,dx = 0$ والتي تمر بالنقطة $(1,-3)$

الحل: نقسم على $x \Leftarrow$

$$x \cdot y \cdot dy - \frac{y(1+y^2)}{1+x^2}\,dx = 0$$

$$y \cdot dy - \frac{y(1+y^2)}{x(1+x^2)}\,dx = 0$$

نقسم المعادلة على $y(1+y^2) \Leftarrow$

$$\frac{dy}{1+y^2} - \frac{dx}{x(1+x^2)} = 0$$

باستخدام طريقة تفريق الكسور:

$$\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{B_1 x + B_2}{1+x^2} \Rightarrow 1 = A(1+x^2) + (B_1 x + B_2)x$$

بالمطابقة نجد: $A=1 \Rightarrow A+B=0 \Leftarrow B_2 = 0, \; B_1 = -1$

$$\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}$$

Scanned by CamScanner

عندئذ تصبح المعادلة: $\frac{y}{1+y^2}dy=\left[\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2}\right]dx=0$

وبالمكاملة: $\frac{1}{2}\ln(1+y^2)-\ln(x)+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)=\ln(c)$

$$\frac{(1+y^2)(1+x^2)}{x^2}=k$$

ولكن بما أن $y=-3$, $x=1$ فإن: $\frac{(10)(2)}{1}=k \Rightarrow \boxed{k=20}$

فالحل الخاص المطلوب هو: $\boxed{1-19x^2+x^2y^2+y^2=0}$

مثال أوجد الحل العام للمعادلة $y'+e^x y=e^x y^2$

الحل: نكتب المعادلة على الشكل: $y'=e^x(y^2-y)$

نفصل المتحولات نجد: $e^x dx=\frac{dy}{y(y-1)}$

بتفريق الكسر: $e^x\cdot dx=\left[\frac{1}{y-1}-\frac{1}{y}\right]dy$

بالمكاملة: $\boxed{e^x=\ln|y-1|-\ln|y|+c}$

وهو الحل الحل العام ...

انتهت المحاضرة تع

Scanned by CamScanner